

Solfège et mathématiques

Ce texte s'adresse à ceux qui apprécient les mathématiques liées au solfège.

Nous allons traiter d'un solfège théorique, le mathématiser et l'observer en l'appliquant sur des domaines aussi variés que les harmoniques d'un son, la physique quantique, l'astronomie et la cosmologie ou encore la thermodynamique (*Les rayonnements infrarouges ou micro-ondes correspondent à des fréquences et donc à des notes de musique*).

Prenant le **Hertz** comme référence, nous pourrions explorer des fréquences acoustiques ou visuelles, et nous borner à des calculs simples, de très hautes ou très basses fréquences.

Nous nous baserons sur le fait qu'**une note est une fréquence**, qu'elle peut être **mesurée** en **Hertz**, (*une vibration par seconde*), qu'**une fréquence est l'inverse d'une durée** (*un tempo correspondant alors à une note*), et qu'en physique une fréquence est équivalente à une onde-radio, une couleur visible, une température ou une énergie et enfin une masse.

Les astronomes expriment les périodes (*et donc les durées*) de révolution planétaire en **jours terrestres**, cela relève alors du domaine des très basses fréquences.

Afin d'analyser correctement le solfège associé à tous ces domaines, il va nous falloir convertir des notes de musique en jours (*pour l'astronomie*), en nanomètres (*pour les couleurs visibles*), en degrés Kelvin (*pour les températures*), ou encore en électron-volt (*pour la physique des hautes énergies*), et par suite en masse.

Personne n'en doute, la musique est avant tout une histoire d'émotions.

Cependant, elle reste tout de même soumise **au jeu** et une règle technique de base.

Toutes les musiques du monde le prouvent, **elle est fondée sur l'octave**, qui **divise** ou **multiplie** une fréquence par **deux**.

Pincez une corde à la **moitié** de sa longueur, vous obtiendrez un son vibrant **exactement** deux fois plus vite que l'original et qui sera alors en **harmonie** avec lui.

Si vous pincez cette même corde au **tiers** de sa longueur, vous obtiendrez ce que l'on nomme en solfège occidental, une **quarte** ou une **quinte**, et donc **historiquement mal nommées**.

A l'aide de la **mesure en Hertz d'une note** de musique et de la **définition de l'octave** nous allons voir que l'on peut explorer des domaines de fréquences dépassant largement le cadre de notre ouïe ou notre vue, **en restant dans le ton**. Nous allons voir que l'oreille humaine perçoit environ dix octaves, mais l'œil un peu moins d'une seule.

Nous nous servons de la **gamme tempérée** pour obtenir un **tableau de référence** basé sur le **demi-ton**, sa définition mathématique comme **racine douzième de deux** et comment grâce à lui on obtient l'**accord parfait majeur** et d'autres **harmoniques**.

Viendront ensuite les notes associées aux planètes (*la musique des sphères, chère à Platon*), comment on peut grâce à l'électron-volt associer une note à une énergie, donc à une masse, comment dans l'infrarouge ou les micro-ondes on peut associer une note à une température, et enfin comment calculer la **note émise lors du Big-Bang**, et à quelle fréquence cette note vibre actuellement, constituant « **le fond diffus cosmologique** », et donc la température moyenne de l'espace inter-galactique. Vaste programme, mais pas impossible.

Le tempérament égal

Le tempérament égal est fondé sur un partage de l'octave en **douze parties égales**. Il en résulte que le demi-ton se définit mathématiquement par **la racine douzième de 2**. C'est à dire, **le nombre qui multiplié douze fois par lui même, donne deux**.

Étudions cela de près; pour cela appelons le demi-ton « **D** ».

Le demi-ton est approximativement égal à $D \approx 1,0594630943592952645618252949461\dots$

C'est un nombre **irrationnel**, avec une infinité de chiffres après la virgule, mais nous verrons plus loin qu'il permet d'obtenir des approximations des **harmoniques** d'une note **fondamentale** vibrant à **1**.

Partons du **La₃ (à 440 Hertz) du diapason**, et calculons en le **demi-ton (D) douze fois**.

Note	Demi-tons	Calcul	Fréquence
La₃	D⁰	440 Hertz x 1	440 Hz
La# ou Sib	D ¹	440 x 1,0594630943592952645618252949461...	466,1637...Hz
Si	D ²	440 x 1,1224620483093729814335330496785...	493,8833...Hz
Do	D ³	440 x 1,1892071150027210667174999705593...	523,2511...Hz
Do# ou Réb	D ⁴	440 x 1,2599210498948731647672106072766...	554,3652...Hz
Ré	D ⁵	440 x 1,3348398541700343648308318811823...	587,3295...Hz
Ré# ou Mib	D ⁶	440 x 1,4142135623730950488016887242070...	622,2539...Hz
Mi	D ⁷	440 x 1,4983070768766814987992807320264...	659,2551...Hz
Fa	D ⁸	440 x 1,5874010519681994747517056392682...	698,4564...Hz
Fa# ou Solb	D ⁹	440 x 1,6817928305074290860622509524615...	739,9888...Hz
Sol	D ¹⁰	440 x 1,7817974362806786094804524111753...	783,9908...Hz
Sol# ou Lab	D ¹¹	440 x 1,8877486253633869932838263133284...	830,6093...Hz
La₄	D¹²	440 Hertz x 2	880 Hz

On obtient un tableau de fréquences de référence, basé sur le demi-ton.

A la dernière ligne, dernière colonne, nous retrouvons le **La₄ à 880Hz**, vibrant **2** fois plus vite que le **La₃** du diapason à **440Hz**.

Pour en obtenir les fréquences à l'octave on peut à loisir ou par jeu, **multiplier** ou **diviser** ces fréquences par **des puissances de deux**.

Soit 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, **1024**, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, etc. 65536 est égal à 2 multiplié 16 fois par lui même (2¹⁶). Ces puissances de deux, sont particulièrement appréciées des informaticiens, calculant en binaire.

L'oreille humaine perçoit des vibrations de l'air, situées entre 20 et 20.000 Hertz. Soit entre 20 et 20.000 vibrations par seconde.

Si l'on décompose, il s'agit d'un facteur 1000 environ égal à **1024**, qui est égal à 2¹⁰.

L'oreille humaine est donc capable d'entendre environ dix octaves.

Le cycle des quintes, bien connu des musiciens, se déduit de la coïncidence suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{douze quintes} & 3^{12} = 531441 \\ \text{dix-neuf octaves} & 2^{19} = 524288 \end{array}$$

Ces deux nombres, suffisamment proches, trompent assez l'oreille pour que l'on ait inventé pour eux [la gamme pythagoricienne](#), et par suite [le tempérament égal](#).

*On pourras noter que les musiciens utilisant ce tempérament, s'ils devaient **calculer**, devraient le faire **en base 12**.*

Notions élémentaires de solfège

Si on multiplie le demi-ton « **D** » **24** fois par lui-même, on saute 2 octaves ($12 \times 2 = 24$ *demi-tons*). Une calculatrice fournit alors :

$$\text{Deux octaves : } D^{24} \approx 3,999999999999999999999999999969$$

Soit approximativement **4**. **Mais par définition, la racine douzième de 2 élevée à la puissance 24 donne exactement 4.**

Montons alors de **4** demi-tons pour obtenir la **tierce majeure**. Pour cela multiplions ce demi-ton « **D** », $24 + 4 = 28$ fois par lui-même, on trouve :

$$\text{Tierce majeure : } D^{28} \approx 5,0396841995794926590688424290674$$

Soit approximativement **5**.

La **quinte** maintenant: On monte de **7** demi-tons par rapport à notre fondamentale plus deux octaves représentant une distance de 24 demi-tons. On multiplie alors le demi-ton $24+7 = 31$ fois par lui-même.

On obtient :

$$\text{Quinte : } D^{31} \approx 5,9932283075067259951971229280593$$

Soit approximativement **6**.

Nous avons maintenant, trois fréquences, **dans les rapports 4, 5, 6** qui constituent la définition de ce que l'on nomme « **L'accord parfait majeur** » par exemple, **Do, Mi, Sol**.

Par la combinaison de ces trois notes, l'oreille recompose la note **fondamentale**, vibrant à **1**, située 2 octaves ($2^2 = 4$) en dessous et vibrant **4** fois moins vite. C'est la **basse**, qui peut être **ou ne pas être jouée**, elle sera de toutes façons perçue et/ou suggérée.

C'est également ce phénomène qui permet à l'**oreille reliée au cerveau** de **reconstituer** un son d'une longueur d'onde de 15 mètres (*300m/s, la vitesse du son dans l'air, divisée par 20Hz, la plus basse fréquence*), avec un haut-parleur de petite dimension ou même une oreillette.

Ce système de tempérament égal a aussi l'énorme avantage de permettre **la modulation** entre diverses tonalités. **On passe ainsi facilement d'une tonique à l'autre.**

L'accord parfait majeur se retrouve en Do, Do#, Ré, Mi bémol, Mi, Fa, Fa#, Sol, La bémol, La, Si bémol, Si; et donc sur la totalité (*tonalité*) des **douze demi-tons** composant la musique occidentale, appelée encore « **musique tonale** ».

D'autres systèmes de solfège existent. Par exemple les Ragas indiens partagent l'octave en 60 parties **inégales**, mais leurs notes y sont **justes**, comme dans la gamme de [Zarlino](#). Ces notes indiennes, pythagoriciennes ou zarliniennes (*si elles sont bien jouées avec l'instrument bien accordé*) sont en totale **harmonie** avec des rapports de nombres **entiers** ou **fractionnaires**.

Ici, pas de nombres irrationnels mais ils ne permettent de générer que de la « **musique modale** ». Une **basse** est alors produite, vient ensuite **l'ensemble ou une partie des harmoniques de cette basse**. Malheureusement, ce système interdit à moins d'user d'artifices **le changement de tonalité**. Ces notes, harmoniquement justes, sont nommées « **naturelles** ».

Pour mieux observer les inconvénients du tempérament égal (*artificiel*), **calculons l'harmonique 7** dans le système occidental basé sur un nombre irrationnel (*D, le demi-ton*).

L'accord de septième

L'accord parfait majeur, (**Do, Mi, Sol**) s'accompagne volontiers d'un **Si bémol**, que l'on nomme la septième. Cette note vibre en effet, sept fois plus vite que la fondamentale (*Do*), et à ce sujet est bien nommée par le solfège occidental. *Qui nomme quinte, une note qui vibre 3 ou 6 fois plus vite que la fondamentale, et tierce une note qui vibre 5 fois plus vite.*

Do, Mi, Sol, correspondant aux harmoniques **4, 5, 6**.

Le **Si bémol** est situé **10 demi-tons** au-dessus du **Do**. Mais il est **légèrement** plus aigu que sa réelle fonction (*harmonique 7 de la fondamentale vibrant à 1*).

Calculons le demi-ton élevé à la puissance $24+10 = 34$ (*24 demi-tons = 2 octaves*).

Septième mineure : $D^{34} \approx 7,1271897451227144379218096446459\dots$

Soit, très approximativement, **7**.

On obtient ainsi une série de fréquence correspondant à **4, 5, 6, 7**. Soit avec **Do** comme tonique **Do, Mi, Sol, Si bémol**, équivalente à l'accord parfait majeur agrémenté d'une septième mineure.

Cela illustre pourquoi les instruments à note fixe (piano, flûte, etc.), doivent impérativement être compensés dans un orchestre (*c'est un artifice permettant d'utiliser les notes naturelles*), par **des instruments à note variables** comme le violon ou le trombone à coulisse et en règle générale, ceux qui permettent une variation **continue** de la note.

La guitare ou la balalaïka avec leurs frets (*note fixe*) bien pratique pour trouver où poser ses doigts, permettent elles aussi d'obtenir une harmonique, juste en bougeant la corde *verticalement par rapport au manche*, mais aussi le vibrato si la guitare est électrique.

L'harmonique **9** est plus juste dans le tempérament égal. Il s'agit alors du **Ré** de l'octave supérieure (**Par rapport au Do**). *On négligera le cas trivial de l'harmonique 8, qui se trouvant à 3 octaves de notre fondamentale, consiste à multiplier par 8 (= 2³) la fréquence, et de multiplier le demi-ton 36 (3x12) fois par lui-même afin d'obtenir 8. Nous passerons également sous silence l'astuce utilisée par certains pianistes consistant à « élargir l'octave » dans les aigus afin d'obtenir un son plus brillant.*

Les harmoniques 9 et 10.

Le **Ré supérieur** est situé à **14** ($12 + 2$) demi-tons **au-dessus** de notre double octave partant du **Do**. Calculons le demi-ton élevé à la puissance 24 (*deux octaves*) + **14 = 38**.

Neuvième : $D^{38} \approx 8,9796963864749838514682643973234\dots$

Soit, approximativement **9**. Le Ré supérieur fonctionne alors comme l'harmonique 9.

On obtient ainsi une série de fréquence correspondant à **4, 5, 6, 7, 9**.

Soit, pour une fondamentale partant de Do : **Do, Mi, Sol, Si bémol, Ré**.

L'harmonique 10, se retrouve avec le **Mi supérieur**, la tierce majeure (*vibrant 5 fois plus vite et augmentée d'une octave*). Simplifions les calculs en considérant 3 octaves comme 36 demi-tons. On y ajoute alors les **4 demi-tons de la tierce majeure**.

Calculons le demi-ton élevé à la puissance $36 + 4 = 40$:

Dixième : $D^{40} \approx 10,079368399158985318137684858096\dots$

Soit, approximativement **10**. Le Mi supérieur fonctionne alors comme l'harmonique 10.

Le triton vu comme un miroir ou la diagonale du carré

Comme nous venons de le voir, la gamme tempérée occidentale, permet **d'approcher** les harmoniques d'un son.

Cette gamme tempérée permet encore, des évènements magiques :

Prenez un clavier de piano, et posez dessus un **miroir** sur le **Ré**.
En regardant dans le **reflet**, vous obtiendrez alors la même gamme.
Le même effet se retrouve en posant ce même **miroir** sur le **Sol#**.

Ces deux notes, partagent effectivement. l'octave en **deux parties égales**. C'est alors le nombre qu'il faut multiplier 2 fois par lui-même pour obtenir l'octave.
C'est donc **la racine carrée de deux**, que l'on peut obtenir en élevant le demi-ton (*racine douzième de deux*), à la puissance 6 (*6 demi-tons égalent 3 tons*).

Le demi-ton D $\approx 1,0594630943592952645618252949461\dots$

Elevé à la puissance 6,

$$D^6 \approx 1,414213562373095048801688724207\dots$$

Racine carrée de deux $\approx 1,4142135623730950488016887242097\dots$

est **strictement**, dans ce système de tempérament, égal à **la racine carrée de deux**.

C'est le Triton :

Ré et Sol# sont distantes d'un Triton (six demi-tons, ou encore trois tons).

Le **Triton** est selon les cultures ce que l'on a appelé une des « **blue note** » (*il y a encore la 9#, quinze demi-tons, une tierce mineure, qui partage l'octave en 4 parties égales, nous y reviendrons*), ou encore au moyen-âge, « **Diabolus in musica** ». Dans une conception plus moderne, un **accord de tension**, encore appelé **accord de dominante**, permettant soit de **relâcher la tension**, en revenant à **la tonique**, soit de **moduler** d'un ton à l'autre.

La gamme de tension maximale est vraisemblablement la **gamme par tons**, partageant l'octave en **six parties égales**. Elle est très utilisée dans les musiques de films fantastiques et fonctionne sans doute par le doute créé en confondant la septième et la neuvième harmonique.

$$7 \times 9 = 63 \text{ environ } 64 = 8 \times 8 = 2^6, \text{ l'octave.}$$

Reprenons l'exemple de la deuxième blue-note, très utilisé en blues, la **9#** citée plus haut, qui partage l'octave en quatre parties égales (*quatre tierces mineures font une octave*) qui n'est en fait qu'une tierce mineure élevée à l'octave. Elle correspond à **l'harmonique 19**, et au demi-ton élevé à la puissance $48 + 3 = 51$.

48 correspondant à 12×4 demi-tons, donc quatre octaves plus 3, pour le nombre de demi-tons de la tierce mineure, on obtient **51** demi-tons :

$$\text{Tierce mineure : } D^{51} \approx 19,027313840043537067479999528655$$

La tierce mineure partage également l'octave en quatre.

On peut calculer :

$$19^4 = 130321$$

Et le rapprocher de :

$$2^{17} = 131072$$

Soit approximativement l'octave (une puissance de deux).

L'accord mineur est alors construit à partir des harmoniques **16** (l'octave), **19** (la tierce mineure) et **24**, la quinte (3×8). Et à partir d'un Do on peut bâtir **l'accord de 9#** :

Do, Mi, Sol, Si bémol, Mi bémol supérieur, très courant en **blues**.

Le nombre douze se met en quatre pour partager l'octave en trois

L'octave peut aussi se partager en **trois** parties égales grâce à la tierce majeure.

Très utilisée par notamment John Coltrane et plus généralement ce que l'on a nommé la **polytonalité**

Nous l'avons vu plus haut, la tierce majeure (*comme la quinte*) est mal nommée, car elle vibre **5** fois plus vite que notre fondamentale.

Cependant

$$5^3 = 125$$

Se rapproche de

$$2^7 = 128$$

Et partage donc, (**toujours approximativement**) l'octave en **3** parties égales.

En effet, 3 tierces majeures (*quatre demi-tons de la gamme tempérée*) égalent :

$$3 \times 4 \text{ demi-tons} = 12 \text{ demi-tons} = \text{une octave.}$$

Le solfège est une simple histoire de nombre ; ils sont tout simplement mal notés.

Les touches blanches du piano, sont notées en France : Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si.

Dans le système Anglo-Saxon, elles correspondent à C, D, E, F, G, A, B.

Pour des raisons historiques, Ut, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si, ont été ainsi nommées, à cause, grâce où parce que :

Le [poème suivant, EN LATIN](#) !!! fourni les lettres adaptées :

Ut queant laxis

Resonare fibris

Mira gestorum

Famuli tuorum,

Solve polluti

Labii reatum,

Sancte Ioannes.

Cela ne simplifie pas les choses.

L'Ut bémol, est par exemple équivalent au Si, ainsi que celui-ci est équivalent au Do bémol.

Si l'on augmente d'un demi-ton, on peut obtenir un Si dièse, équivalent au Do.

Le même phénomène se reproduit entre Fa et Mi, et ne parlons pas des bécarres.

Les degrés en notation musicale s'expriment encore en termes de I, II, III, IV, V, VI, VII.

On remarquera ici l'utilisation du **Latin**, et la complication des écritures associées.

Les inconvénients des notations historiques

Ces inconvénients sont très nombreux, prenons pour exemple les équivalences suivantes en

Do :

C = Do = I = Ionien	<i>(La tonique)</i>
D = Ré = II = Dorien	<i>(Le mode miroir, en même temps que la sous-dominante du Do)</i>
E = Mi = III = Phrygien	<i>(Un mode mineur, très utilisé en flamenco)</i>
F = Fa = IV = Lydien	<i>(Le mode le plus proche des harmoniques naturelles de 1 à 12)</i>
G = Sol = V = Mixolydien	<i>(La dominante, très utilisé en Blues, Rock ou dérivés)</i>
A = La = VI = Eolien	<i>(La gamme mineure naturelle)</i>
B = Si = VII = Locrien	<i>(Peu usité, ne comportant pas de quinte juste)</i>

On y perd son Gréco-Latin et même, son Anglo-Saxon !

Essayez de vous y retrouver en calculant **le triton, la racine carré de deux**, avec ces diverses notations, notamment **des chiffres romains** (I, II, III, IV, V, VI, VII) !

Mais revenons à notre sujet :

Partons du **La₃** du diapason, pour en calculer la couleur

Le **La₃** du diapason a été fixé par la conférence internationale de Londres en 1953 et vibre à **440 Hertz**

En musique, **fondée sur l'octave**, il est préférable de se baser sur **des puissances de deux**.

Et partir de zéro pour que tout reste clair. En abaissant 440Hz de trois octaves (220Hz, 110Hz, 55Hz) on obtient le **La₀** vibrant à **55 Hz**.

Il devient facile alors de calculer la **43^{ème} octave du La₀** (55Hz) dans des fréquences comparables à celles de la lumière visible : $2^{43} = 8.796.093.022.208$

$$55\text{Hz} \times 2^{43} = 55\text{Hz} \times 8.796.093.022.208 = 483.785.116.221.440\text{Hz}$$

La conversion en nanomètres (*unité utilisée préférentiellement par les physiciens s'occupant de spectrographie*) s'obtient en divisant la vitesse de la lumière (*définie exactement égale à 299.792.458 m/s*) par cette fréquence.

Si l'on ajoute 9 zéros à cette vitesse, on l'obtient en **nanomètres (10⁻⁹m) par seconde**.

On peut alors aisément convertir la fréquence du **La₄₃** en nanomètres (*milliardième de mètre*).

$$\text{La}_{43} \Leftrightarrow 299.792.458.000.000.000 \text{ m/s} / 483.785.116.221.440 \text{ Hz} \approx \mathbf{619,681... \text{ nm}}$$

Poursuivant, on peut en tirer le schéma page suivante, avec en bas les équivalences de longueur d'onde (*en nanomètres = 10⁻⁹ m*) et de fréquence (*en TéraHertz = 10¹² Hz*).

On en déduit les notes associées à leurs couleurs :

Prenons une référence dans le domaine des spectres, par exemple le site :

http://www710.univ-lyon1.fr/~fdenis/club_EEA/cours/couleur1.html

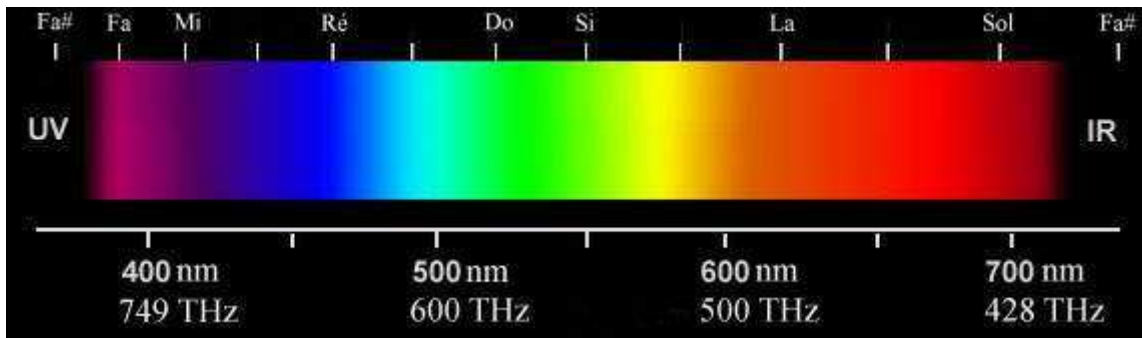
Les couleurs de l'arc-en-ciel s'y mesurent en nanomètres, sur une échelle linéaire. On peut alors facilement en calculer les fréquences associées grâce à la vitesse de la lumière fixée **exactement égale à : 299.792.458 m/s**.

Le solfège en couleurs

La division de la vitesse de la lumière (299.792.458.000.000 nanomètre par seconde) par une fréquence en Hertz (l'inverse d'un tempo compté en seconde) nous mène directement à une longueur d'onde en nanomètres (nm) située dans le domaine des fréquences visibles.

Note	Note	Ref (La ₀ = 55Hz)	43 ^{ème} octave (x 2 ⁴³)	Nanomètres	Couleur
Fa#₄₃	F#₄₃	46,25...Hz	406.813.169.983.710,56...Hz	736,93...nm	
Sol ₄₃	G ₄₃	48,99...Hz	431.003.539.897.055,97...Hz	695,57...nm	
Sol# ₄₃	G# ₄₃	51,91... Hz	456.632.344.059.144,89... Hz	656,53...nm	
La₄₃	A₄₃	55 Hz	483.785.116.221.440 Hz	619,68...nm	
Sib ₄₃	Bb ₄₃	58,27...Hz	512.552.476.236.938,11...Hz	584,90...nm	
Si ₄₃	B ₄₃	61,74...Hz	543.030.432.495.505,61...Hz	552,07...nm	
Do ₄₃	C ₄₃	65,41...Hz	575.320.702.342.954,78...Hz	521,09...nm	
Do# ₄₃	C# ₄₃	69,30...Hz	609.531.051.553.229,92...Hz	491,84...nm	
Ré ₄₃	D ₄₃	73,42...Hz	645.775.653.986.660,10...Hz	464,24...nm	
Mib ₄₃	Eb ₄₃	77,78...Hz	684.175.472.634.604,47...Hz	438,18...nm	
Mi ₄₃	E ₄₃	82,41...Hz	724.858.663.322.191,40...Hz	413,59...nm	
Fa ₄₃	F ₄₃	87,31...Hz	767.961.002.416.471,50...Hz	390,37...nm	
Fa#₄₄	F#₄₄	92,50...Hz	813.626.339.967.421,12...Hz	368,46...nm	

Sur un spectre continu on obtient ça :



On peut visualiser en haut l'échelle logarithmique des notes correspondantes aux couleurs, et en bas l'échelle linéaire associée aux longueurs d'onde et aux fréquences.

On y remarquera dans l'échelle du bas, deux calculs simple que l'on peut effectuer de tête : 500nm x 600THz sont égaux à 600 x 10⁹ mètres multipliés par (500 Hertz x 10¹²), et environ les 300.000 kilomètres que la lumière parcourt chaque seconde.

***Petite note récréative :** Pour paraphraser Saint-Exupéry, on peut en conclure que le **Fa#** est invisible pour les yeux, Il est en effet situé aux limites de l'infrarouge et de l'ultraviolet. On pourrait aussi reprendre Rimbaud et sa correspondance entre les couleurs et les voyelles. Les néologistes italiens parlent alors de cinesthésie, mais cela reste **subjectif**. Le schéma ci-dessus se veut **objectif**, chacun pouvant en vérifier les résultats avec une simple calculette.*

Il reste clair que les vibrations **lumineuses** se situant environ, mais pas exactement : Entre 700 et 400 nanomètres, restent confinées dans moins d'une octave.

$$700 / 400 = 1.75 \text{ presque deux, mais moins d'une octave.}$$

Le cercle chromatique

Il existe deux méthodes pour générer des couleurs.

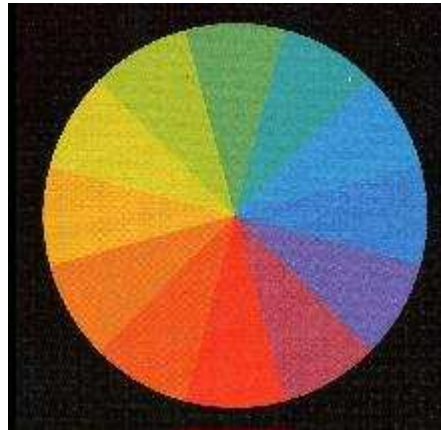
Les synthèses additives et soustractives.

La **synthèse soustractive** consiste à **éclairer** un tableau ou une image papier pour que les pigments qui les composent ne renvoient que leurs fréquences et notes associées.

Nous avons tous appris à l'école que les trois couleurs primaires étaient le **jaune**, le **rouge** et le **bleu**.

Ces couleurs permettent d'obtenir toutes les autres, lorsqu'elles sont éclairé par de la **lumière blanche**, qui contient elle-même, l'ensemble des fréquences de la lumière visible, **tout l'arc-en-ciel**.

Avec ces couleurs primaires, on obtient le cercle chromatique, avec des couleurs diamétralement opposées.



Le mélange du **jaune** et du **bleu**, donne du **vert**.

Le mélange du **rouge** et du **bleu**, donne du **violet**.

Le mélange du **rouge** et du **jaune**, donne de l'**orange**.

Le contraste provoqué par **les couleurs complémentaires** (*elles sont diamétralement opposées sur le cercle chromatique*) est connu depuis longtemps.

On déduit du cercle chromatique que le **jaune** et le **violet** sont complémentaires, ils contrastent fortement. Ainsi que le **rouge** et le **vert**, ou encore, le **bleu** et l'**orange**.

En **synthèse additive**, la couleur blanche est obtenue, sur les écrans de télévision, les ordinateurs ou les appareils de photo numérique, par le système **RVB**. Pour **Rouge**, **Vert**, **Bleu**. Chaque pixel est alors décomposé en ces trois couleurs, dosées sur 256 niveaux. C'est encore une puissance de 2 ($256 = 2^8$), chère aux techniciens. Pratique! Il ne faut que **8** fils pour la transmettre. On obtient alors pour chacune des couleurs Rouge, Vert, Bleu :

$$\begin{aligned} & 8 \times 3 = 24 \text{ fils et} \\ & 2^8 \times 2^8 \times 2^8 = 256 \times 256 \times 256 = 16.777.216 \\ & \text{environ 16 millions de couleurs.} \end{aligned}$$

Les couleurs blanche, grise ou noire sont obtenues en système **RVB**, par le mélange en quantité égales du **Rouge**, du **Vert** et du **Bleu**.

Maintenant, après les hautes, penchons nous sur les **très basse fréquences**.

L'octave d'une journée nous mène à la musique des sphères

En effet, une journée composée de $24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$ heures est **trois octave plus une quinte** en dessous de l'heure. Mais calculons plus précisément, **l'octave d'une journée**.

La journée se compose de $60 \times 60 \times 24$ secondes, soit, 86.400 secondes.

La **26^{ème} octave du Hertz** (*une pulsation par seconde*) est précisément égale à
 $2^{26} = 67.108.864$ Hertz

Ce nombre, divisé par le nombre de secondes dans une journée, 86.400 donne:

$$2^{26} / (60 \times 60 \times 24) = 67.108.864 / 86.400 \approx 776,72296296296296296296296 \text{ Hertz}$$

Soit, une fréquence proche du Sol₃ à **783,9908Hz**, calculé plus haut dans notre **tableau de demi-tons**. Cette **fréquence d'une journée à sa 26^{ème} octave 776,72296...** Hertz, va nous être utile pour calculer :

La musique des sphères ☺

Où l'on remarquera au passage, qu'il est parfois difficile de faire un simple smiley.

Tapez deux-points, tiret, parenthèse fermante, en utilisant un système comme Microsoft Word 2000. Essayez, vous obtiendrez ceci : ☺

Les astronomes expriment les périodes de révolution des planètes en **jours terrestres**. Nous avons déjà la **26^{ème} octave** de ce jour : **776,72296...** Hertz.

Elle nous servira de **fréquence de référence** pour obtenir un tableau où l'on pourra remarquer l'expression de la [Loi de Titius-Bode](#) qui associe des rapports approximatifs **fractionnaires** aux distances entre les planètes.

On peut, [d'après les données des astronomes](#), en déduire les notes **approximatives** produites par la révolution des planètes.

La période de révolution de Mercure, la première planète, la plus proche du soleil est de 87,969132 jours.

$$776,72296... / 87,969132 \approx 8,8294944522467604086733851479051... \text{ Hertz}$$

Cette fréquence élevée 6 octaves plus haut, et donc multipliée par $2^6 = 64$, nous donne une fréquence compatible avec notre **tableau de demi-tons de référence**.

$$\begin{aligned} & \mathbf{32^{ème} octave de l'année de Mercure :} \\ & \approx \mathbf{565,08764494379266615509664946592... \text{ Hertz}} \end{aligned}$$

Cette **32^{ème} octave** (26+6) de l'année Mercurienne à environ **565,0886** Hertz est située un peu au-dessus du **Do#3 (554,3652 Hz)**.

Le principe de calcul étant clair, on peut produire **le tableau suivant** :

Planète	Période	Octave	Fréquence	Note approximative
Mercure	87,969132 jours	2^{32}	565,0876Hz	Au-dessus du Do# (554,37Hz)
Vénus	224,701 jours	2^{33}	442,4570Hz	Très proche du La (440Hz)
Terre	365,257 jours	2^{34}	544,3868Hz	En dessous du Do# (554,37Hz)
Mars	686,960 jours	2^{35}	578,9015Hz	En dessous du Ré (587,33Hz)
Jupiter	4335,355 jours	2^{38}	733,8401Hz	Au-dessus du Fa# (739,99Hz)
Saturne	10757,737 jours	2^{39}	591,4733Hz	Au-dessus du Ré (587,33Hz)
Uranus	30708,160 jours	2^{41}	828,8239Hz	Très proche d'un Sol# (830,61Hz)
Neptune	60224,904 jours	2^{42}	845,2204Hz	Au-dessus du Sol# (830,61Hz)
Pluton	90613,306 jours	2^{42}	561,7643Hz	Au-dessus du Do# (554,37Hz)
90377 Sedna	4154395,421 jours	2^{48}	784,1844Hz	Presque exactement le Sol (783,99Hz)

Récréations astronomiques, liées au solfège

On peut voir dans le tableau ci-dessus que la Terre et Mercure résonnent presque à 2 octaves, $2^2 = 4$:

365,257 jours / 87,969132 jours $\approx 4,1521041721771223114944455743863...$
Et environ deux Sol#.

Saturne et Mars sont presque à 4 octaves, $2^4 = 16$:

10757,737 jours / 686,960 jours $\approx 15,659917608012111331081867939909...$
Et environ deux Ré.

Vénus et Mercure, révolutionnant respectivement à 224,701 et 87,969132 jours terrestres, on peut en calculer l'intervalle musical qui les séparent :

$224,701 / 87,969132 \approx 2,554316439089111394210414625894...$

Lorsque l'on élève ce nombre à l'octave en le multipliant par 2, on obtient :

5,108632878178222788420829251788...

Soit, comme vu plus haut (*en page 3*), environ une tierce majeure (**l'harmonique 5**), et approximativement l'intervalle entre La (*Vénus*) et Do# (*Mercury*).

*Certains astronomes, comme **Steven Soter**, qui vient de publier un article (Pour la Science N° 365 de Mars 2008) sur le sujet des résonances entre les planètes pensent, sans doute avec raison, qu'il existe pour les planètes des orbites permises, et d'autre interdites. Un équilibre harmonieux serait donc nécessaire à l'existence d'un système planétaire.*

***Daniel Kirkwood** découvrit dès 1866, qu'aucun des astéroïdes situé entre Mars et Jupiter n'avait une période de 3,9 années, soit le tiers de la période de révolution de Jupiter. Leurs orbites ont tendance à devenir de plus en plus **elliptiques** et finissent par s'écraser soit sur **Jupiter** (la planète la plus massive), soit sur le Soleil (le corps le plus massif proche de nous).*

Nous pouvons aussi aborder :

La physique quantique, liée au solfège

Pour cela nous allons utiliser comme unité de mesure, l'électron-volt.

Et nous référer au site <http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9ga%C3%A9lectron-volt>

En voici un extrait :

Utilisation de l'électron-volt pour une durée [modifier]

Il arrive également que l'on mesure une durée très brève en électron-volts. En effet, d'après la relation de Heisenberg, $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$, on peut faire correspondre un temps à une énergie, et lorsque cette durée est très petite (inférieure à l'attoseconde), la mesure est moins significative aux yeux de l'observateur exprimée en secondes qu'en eV. La conversion s'effectue par

$$\frac{\hbar}{2 \text{ eV}} = \frac{1,054\,571\,68 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2 \times 1,6022 \times 10^{-19} \text{ J}} = 3,29101135938 \times 10^{-16} \text{ s}$$

On rencontre de telles durées notamment dans les demi-vies de noyaux exotiques. Par exemple, la demi-vie du ${}^8\text{C}$ est de 230 keV, soit $1,43 \cdot 10^{-21}$ s.

L'électron-volt lié au solfège

Traduisons donc **l'électron-volt en terme de fréquence**, pour en obtenir une équivalence entre sa note, l'énergie transportée et la masse correspondante.

Nous allons nous représenter de façon **précise** comment l'on peut transposer, en changeant simplement d'**unité de mesure** d'espace, **passant des mètres en seconde-lumière**, la fameuse équation d'Einstein $E=mc^2$, et rendre évidente **l'équivalence** entre la **masse**, **l'énergie** et les **fréquences**, associées aux **notes**, et donc au **sofège**.

L'électron-volt est une unité de mesure d'énergie, de masse, et de fréquence, utilisée couramment par les physiciens dans le domaine des très hautes fréquences, à quelle note peut-il correspondre du point de vue du solfège ?

La **mécanique quantique** nous a appris que dans le **domaine microscopique**, qu'un corpuscule **massif** (*ou non comme le photon, particule de lumière*) est équivalent à une **onde**.

Comme vu plus haut, **l'électron-volt peut se convertir en une durée**, une fréquence, une température, une énergie, une note de solfège, et même une masse. Beaucoup d'unités de mesure sont habituellement usitées par les physiciens ou les astronomes, mais les musiciens connaisseurs (*ou théoriciens*), préfèrent le **Hertz**.

Commençons par la durée, puis la fréquence de l'électron-volt.

Un électron-volt, en durée, correspond à :

$3,29101135938 \times 10^{-16}$ Seconde $\approx 0,000.000.000.000.000.329.101.135.938$ Seconde

Convertie en **Hertz** (*l'inverse d'une durée*) on obtient la fréquence théorique à laquelle vibre **un électron** animé par une différence de potentiel de **un volt**, et devenu par suite une **unité de mesure** de référence pour les physiciens:

Un, divisé par l'équivalence en durée d'un électron-volt $3,29101135938 \times 10^{-16}$ Seconde est environ égal à $3.038.579.606.083.134$ Hertz.

Abaissons alors cette fréquence de 42 octaves, $2^{42} = 4.398.046.511.104$.

Nous obtenons alors une fréquence comparable à notre **tableau de demi-tons** situé plus haut, page 2 de ce texte, basé sur le La₃ du diapason (*et celui du téléphone*) à 440Hz.

Amusons nous à calculer la note de l'électron-volt divisé par 2^{42} :

**Un électron-volt abaissé de 42 octaves $\approx 3.038.579.606.083.134$ Hz / $2^{42} \approx 690,893$ Hz
Soit un peut en dessous du Fa3 à 698,4564 Hz**

On pourrait en déduire qu'un électron accéléré par une différence de potentiel de un volt se comporte, du point de vue du musicien ou de la mécanique quantique, comme une onde vibrant un peut en dessous du **Fa45**. Mais, il possède en plus **une masse** convertible en **énergie**, en **fréquence** et donc en **note**.

Nous allons maintenant explorer **l'énergie du vide**, et la relier au solfège.

Une onde de lumière, un photon animé d'une énergie de 2×511 Kilo-électron-volt / c^2 , peut se **matérialiser** en un électron et un positron (*son anti-particule au sens de Dirac*).

http://en.wikipedia.org/wiki/Pair_production

Comment calculer la note associée à cette matérialisation ?

La matérialisation d'une fréquence

C'est relativement simple : nous avons déjà vu plus haut **la fréquence correspondant à un électron-volt**. Il suffit alors de la multiplier par $2 \times 511.000\text{eV}$ pour obtenir la note du **photon créateur d'une paire électron-positron**.

Ce photon vibre à la fréquence vertigineuse de :

2×511 Kilo-électron-volt multiplié par un électron-volt à **3.038.579.606.083.134 Hz**

Nous fournis environ : 3.105.428.357.416.963.027.924 Hz

Descendons alors cette fréquence de **62** octaves, soit $2^{62} = 4.611.686.018.427.387.904$

Nous obtenons alors une fréquence de 673,38243432191257230750468142057 Hz

Soit un peu en dessous du Fa3 à 698,4564...Hz, et finalement en dessous du **Fa₆₅**.

On peut donc en déduire que la **matérialisation** la plus simple à calculer (*un photon, une onde de lumière, se transformant en une paire d'électron-positron*) ; correspond environ à un **Fa₆₅**. Un satellite comme [INTEGRAL](#) détecte régulièrement ces photons.

Or, on peut facilement par mathématisation du solfège, se servir du facteur de conversion de l'électron-volt en joules pour en estimer sa note.

Nous allons alors passer dans un domaine d'hyper fréquences, et par là même, sortir du domaine physique. Il est en effet peut probable (*mais je peux me tromper*) que l'on puisse un jour produire une particule animée de l'énergie d'un joule.

Mais on peut, toujours **par jeu**, en estimer **la fréquence**.

La particule est alors animé d'une **énergie** que l'on peut convertir à loisir en Joules, en Calories, en Ergs, en Kilo-Watt, en Cheval-vapeur, en Kilogramme ou autre système de mesure d'énergie (*le Hertz, et donc une note de musique*).

Pour cela, servons nous d'un autre site de référence :

http://unit-converter.org/conversion.php?c_id=2&lang=fr

On y apprend la valeur qui nous permettra de convertir un électron-volt en Joule (*unité S.I. de mesure de l'énergie*) puis en Hertz (*unité de mesure d'une note de musique*).

1 Joule équivaut approximativement à $6,24219725 \times 10^{18}$ électron-volt

Nous pouvons alors calculer la fréquence théoriquement associée à un Joule, les lecteurs ou lectrices intéressés par ce sujet pourront convertir facilement une énergie en fréquence, quelque-soit le système d'unités.

La célèbre équation d'Einstein $E=mc^2$ exprime l'énergie en joules car elle permet de convertir une masse exprimée en kilogrammes puis multipliée par la célérité (*la vitesse*) de la lumière au carré, fournis directement l'énergie en Joules..

Pourquoi ?

En physique, la définition d'une **force** (*En Newton*) est le produit d'une **masse** (*en Kilogrammes dans le Système International*) animée par une **accélération** (*une vitesse mesuré en mètres par seconde m / s*), et qui **accélération** toutes les **secondes** se mesure en mètres par secondes au carré m / s^2 .

Définition d'une force produisant de l'énergie

Une **énergie** est le produit d'une **force** par le **travail** qu'elle a effectuée sur un certain nombre de **mètres**.

Le joule, dans le système international, est alors exactement égal à :

1 Kilogramme multiplié par 1 mètre² et divisé par 1 seconde².

Ou encore, dans une autre notation : 1J = 1Kg x (1 m/s)².

Et de fait, une masse multipliée par une vitesse élevée au carré.

Dans le cas de la formule d'Einstein, cette vitesse est celle de la lumière.

Petite note récréative : *On pourra remarquer au passage qu'en changeant simplement d'unité de mesure, la célérité de la lumière (299.792.458 mètres par seconde) peut se convertir en une seconde-lumière. Dans ce cas 1 élevé au carré donne 1, et l'on retrouve une équation encore plus simple que celle d'Einstein d'équivalence entre masse et énergie : $E=mc^2$ (c² égal 1), Dans tous ces cas, cette énergie pourra être exprimée en Joules, en Kilogrammes ou en Hertz, voire même en barils de pétrole, en dollars ou en euros ☺ ! Ces cours étant variables, nous laisserons à la discrétion du lecteur (lectrice) le calcul du facteur de conversion (variable) d'une monnaie en énergie, en temps, ou en fréquence ! (une expression populaire stipule que « le temps c'est de l'argent »)*

On peut encore faire pire :

calculer la fréquence (et donc la note) du Big-Bang

Et la réduire à l'**octave, une puissance de 2**. Il s'agit ici de physique, que l'on peut **par jeu**, lier au solfège (*l'ouïe*) et la lumière (*la vue*).

Force est de constater que les physiciens ne sont pas d'accord entre eux.

Cependant, qu'il s'agisse de « Théorie des cordes » ou de « Mécanique quantique à boucles », ils sont tous d'accord sur le fait mathématique, qu'il est impossible de calculer en dessous de ce que l'on nomme [le temps de Planck](http://fr.wikipedia.org/wiki/Temps_de_Planck). (http://fr.wikipedia.org/wiki/Temps_de_Planck).

La mécanique quantique à boucles a même défini ce **temps de Planck** comme étant « **L'atome de temps** ».

Calculons maintenant la fréquence de cet «**Atome de temps**».

C'est particulièrement facile. Une fréquence étant l'inverse d'un tempo, on l'obtient avec le **temps de Planck**, *approximativement égal à 5,39121 10⁻⁴⁴ secondes*.

Si l'on en calcule l'inverse, on obtient une fréquence de :

$$1 / (5,39121 \times 10^{-44} \text{ secondes}) \approx 1,8548711699228930054663053377628... \times 10^{43} \text{ Hertz}$$

Soit environ 18.548.711.699.228.930.054.663.053.377.628.000.000.000 Hz

C'est une fréquence particulièrement élevée. Vous ne la verrez jamais, vous ne l'entendrez jamais, les physiciens ne la produiront probablement jamais. La lumière a mis 380.000 ans à se manifester après le Big-Bang.

Mais on peut, **par une vue de l'esprit**, descendre cette fréquence à sa **134^{ème} octave**, pour la retrouver dans notre tableau de référence des demi-tons. OK, Allons-y :

$$134^{\text{ème}} \text{ octave} = 2^{134} \approx 2,1778071482940061661655974875633... \times 10^{40}$$

Soit environ 21.778.071.482.940.061.661.655.974.875.633.000.000.000

La note du Big-Bang

Ces deux nombres, la fréquence du Big-Bang (*correspondant au temps de Planck*) divisés par sa **134^{ème} octave** (2^{134}) fournissent une fréquence approximativement égale à :

851,71507099511252167934046318453... Hertz

On peut donc, par ce raisonnement, en déduire que le Big-Bang a résonné entre le **La₁₃₇** ($830,60939 \text{ Hz} \times 2^{134}$) et le **La₁₃₇** ($\text{La}_3 \times 2^{134} = 880\text{Hz} \times 2^{134}$ et $134 + 3 = 137$)..

Se basant sur le Système International des poids et mesures et sa mesure la plus précise, **les fréquences exprimé en Hertz**, nous avons vu que l'on peut effectuer des calculs simples pour explorer des domaines très variés.

Nous allons maintenant explorer le domaine des **températures** et par suite des domaines de fréquences situées entre les micro-ondes et l'infrarouge.

Les lecteurs ou lectrices intéressés pourront se baser sur le site :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Temp%C3%A9rature_de_couleur

Pour calculer la température et les notes associées à une fréquence visible.

Nous nous bornerons dans ce texte à étudier **l'écho actuel du Big-Bang** et en calculer la note, grâce à la découverte de [Penzias et Wilson](#) en 1965, et aux mesures affinées depuis par les satellites **COBE** et **WMAP** découvrant un rayonnement à 7,35 centimètres.

Il existe dans toutes les directions de l'espace ce que l'on a nommé le «**rayonnement de fond diffus cosmologique**» ou encore «**rayonnement fossile**». L'expression : « Toutes les directions de l'espace » signifie qu'il est émis **en dehors de notre galaxie** (*la Voie Lactée*) et par suite dans **tout l'univers**.

L'espace ayant tendance à se **dilater**, il a tendance à se **refroidir** (*C'est le principe de base d'un réfrigérateur, on compresse de l'air pour le chauffer et le détendre ensuite. Enlevez la soupape d'une cocotte-minute en cours de cuisson, vous sentirez de l'air froid*) et **l'univers** est en **majeure partie** constitué de **vide**.

Pour en prendre bonne mesure imaginons que **la terre faisant 12.000 km** de diamètre, nous la réduisons de plusieurs ordres de grandeur (10^{10}), **la réduisant à la taille d'un millimètre**.

La Lune est alors distante d'environ 3,84 cm et le Soleil de 15 mètres, mais la plus proche étoile (alpha du Centaure) d'environ **3.500 kilomètres** ! *On peut alors se gausser de certains journalistes dithyrambiques voyant un satellite orbitant à 1.000km (à un dixième de millimètre à notre échelle) affirmant qu'ils sont « sur le chemin des étoiles » !!!*

A cette échelle, il est plus facile de se représenter le vide de l'univers et les mystères qui l'entourent.

Sa température moyenne actuelle varie de quelques millièmes de degrés autour d'environ 3°K au-dessus du **zéro absolu** (*inaccessible*) où **tous les atomes sont strictement immobiles**.

Le rayonnement de fond diffus cosmologique

Ce rayonnement correspond à une température de $2,725^{\circ}\text{K}$ soit environ -270°C , est situé dans le domaine des micro-ondes (*au dessous en fréquence des infrarouges et de surcroît, de la lumière visible*), et une longueur d'onde de **7,35 cm**. Il devient facile d'en évaluer la fréquence à l'aide d'une simple division.

Nous avons la vitesse de la lumière en centimètre par seconde : **29.979.245.800 cm/s**

Cette vitesse divisée par la longueur d'onde de **7,35cm**, nous fournis directement la fréquence en Hertz, soit environ **4.078.808.952 Hz**, et environ 4GHz.

Abaïssons cette fréquence de **23 octaves** on obtient 486,23 Hertz, un peut en dessous du Si³. On en déduit que **le rayonnement fossile du Big-Bang résonne aujourd'hui** un peut en dessous du **Si²⁶**.

Terminons par une question de biologie, la température des animaux à sang chaud (*ou des êtres-humains*) se situe aux alentours de **37°C quel peut en être l'équivalent en solfège ?**

Cette température est d'après certains biologistes, idéale pour une **chimie du carbone** (*l'atome à 4 petits bras musclés qui compose le squelette des molécules à la base de la chimie organique*).

L'atome suivant à quatre électrons sur sa couche périphérique (*dans le tableau de Mendeleïev*), est le **Silicium** à la base des composants d'un ordinateur. Mais mélangé à de l'eau, il ne fournit que de la silice (SiO_2), équivalente au quartz, un **minéral** peu disposé à des réactions chimiques aptes à générer de l' **A.D.N.**

Les atomes avec quatre électrons sur leur couches périphérique, Carbone, Silicium, Germanium, etc. font partie de ce que l'on nomme les semi-conducteurs.

Petite note récréative : cela permet à un ordinateur pourvu de bêtise artificielle de traduire « The Germanium is a semi-conductor » par « L'allemand est un demi-chef d'orchestre » !!!

Plus sérieusement, la chimie organique a besoin d'eau (H_2O), et pour un métabolisme optimal (*les animaux à sang chaud*) semble s'opérer aux alentours de 37°C , les réactions chimiques se **ralentissant en basse température, s'accéléralent en hautes** mais produisant alors beaucoup de **résidus** (*les radicaux libres*), mais cela ne gêne pas certaines bactéries.

Cette température (37°C) est situé dans les infra-rouges mais peut varier dans de fortes proportions en fonction des habitants de notre terre.

S'il est relativement facile de calculer une **pointe de fréquence** dans **un corps très froid** comme la température globale actuelle de l'univers, cela se complique pour **des corps plus chaud** où la vitesse des atomes et molécules **s'étale** autour d'une valeur statistique comportant tout de même un **maximum**. C'est le **rayonnement du corps noir** (*Schématiquement, un four fermé que l'on chauffe pour en mesurer le rayonnement*).

C'est un **spectre continu** de fréquences **limité dans un certain domaine**. Les photographes parlent de **températures de couleurs**, mais il devient délicat d'en parler en termes de solfège, sinon d'en calculer le maximum mais cela n'en fait pas une note.

Philippe Kolitcheff